数理解析研究所講究録
505巻 1983年 1-16

S-duality theory of generalized projective spaces

阪市大理　大嶋秀明 (Hideaki Ōshima)

§1. 序

「与えられた空間のS-双対はいかなる空間か？」という問に対するAtiyahの（特殊）解は有名だが，一方で「与えられた標準的な写像のS-双対はどんな写像か？」の方はSpanier-Whitehead [6] 以来議論されることが余りなかったように思う。よく知られているように stunted 射影空間 $P_{n,k} = P_n/P_{n-k}$ のS-双対は stunted 準射影空間 $Q_{m,k} = Q_m/Q_{m-k}$ であり，cofibration のS-双対も cofibration である。従って標準的な cofibration

$$P_{k+n,k} \subset P_{k+\ell+n,k+\ell} \to P_{k+\ell+n,\ell}$$

のS-双対も

$$Q_{k+\ell+m,k} \leftarrow Q_{k+\ell+m,k+\ell} \leftarrow Q_{\ell+m,\ell}$$

という形の cofibration である。この第二の cofibration も標準的なものであるのは自明の事と長い間思いこんでいたが，実

際にその証明を念のため付けようとした結果の報告が本講演である。ついでに或る種の transfer が我々に馴染の写像で実現されることも報告する。使う手法はさほどデリケートではないので，射影空間やレンズ空間の一般化としての射影もどき空間 (generalized projective space) を扱うことにする。詳しくは [5] にまとめてあるので，ここでは証明等はほぼ全て省くことにする。

若干の記号の説明をする。有限CW複体 X 上の距離を持ったベクトル束 ξ に対し

$$D_\varepsilon(\xi) = \{ v \in \xi ;\ |v| \leqq \varepsilon \},\ D(\xi) = D_1(\xi);$$

$$\mathring{D}_\varepsilon(\xi) = \{ v \in \xi ;\ |v| < \varepsilon \};$$

$$S_\varepsilon(\xi) = \{ v \in \xi ;\ |v| = \varepsilon \},\ S(\xi) = S_1(\xi);$$

$X^\xi = D(\xi)/S(\xi)$ (Thom 複体);

$J(X) = X$ の J 群

とおき，また virtual 束 $\xi - \zeta \in KO(X)$ に対し，CWスペクトラムとして

$$X^{\xi-\zeta} = \Sigma^{-n} X^{\xi\oplus\zeta'}$$

と定める。但し $\zeta\oplus\zeta' \cong n$ (n-次元自明束)。可微分多様体の embedding $i : Y \to Z$ に対し，その法束を $\nu(i)$ と書き，チューブ状近傍とは embedding $\tilde{i} : \nu(i) \to Z$ で $\tilde{i}|_Y = i$ となるものをいう。

§ 2. Thom 複体の S-双対論

stunted（準）射影空間は射影空間という可微分閉多様体上の標準的なベクトル束の Thom複体であることはよく知られている。この節では Thom複体の S-双対論の復習と若干の補足を行う。

まず次の定理は [8]に述べられている。[5]も参照のこと。

定理 1. Yは可微分閉多様体，$i: Y \to \mathbb{R}^n$はn次元ユークリッド空間への embedding，α, βはY上のベクトル束で$\alpha \oplus \beta \cong \nu(i)$とすると

$$S^n \xrightarrow{T} Y^{\nu(i)} \approx Y^{\alpha \oplus \beta} \xrightarrow{d} (Y \times Y)^{\alpha \times \beta} = Y^\alpha \wedge Y^\beta$$

の合成はn-双対写像である。ここでTは Pontrjagin-Thom構成，dは対角写像である。

系 2. Yは可微分閉多様体で，α, βはY上の virtual 束で$J(TY + \alpha + \beta) = 0$とする。このとき$n$-双対写像

$$S^n \longrightarrow Y^\alpha \wedge Y^\beta$$

が存在する。但し$n = \dim Y + \dim \alpha + \dim \beta$．

写像の双対に関する次の定理は Boardman [1]の補題3.3 の拡張になっている。

<u>定理 3.</u> X，Y は可微分閉多様体；α, β は Y 上の virtual 束で $J(TY+\alpha+\beta)=0$；$f: X \to Y$ は可微分写像で $f_1: X \to \mathbb{R}^m \times Y$ は embedding かつ f のリフト；$\tilde{f}: \nu(f_1) \to \mathbb{R}^m \times Y$ は f_1 のチューブ状近傍とする。このとき安定ホモトピー可換図

$$\begin{tikzcd} S^{m+r} \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_2"'] & Y^{m+\alpha} \wedge Y^{\beta} \arrow[d, "T_\alpha(\tilde{f}) \wedge 1"] \\ X^{\nu(f_1)+f^*\alpha} \wedge X^{f^*\beta} \arrow[r, "1 \wedge f_*"] & X^{\nu(f_1)+f^*\alpha} \wedge Y^{\beta} \end{tikzcd}$$

が存在する。ここに ρ_1, ρ_2 は $m+r$ 双対写像，$r=\dim Y+\dim(\alpha+\beta)$，$T_\alpha(\tilde{f})$ は Thom 写像（定義は下で行う）である。従って標準的な写像 $f_*: X^{f^*\beta} \to Y^{\beta}$ の $m+r$-双対は Thom 写像 $T_\alpha(\tilde{f})$ である。

<u>注意 4.</u> その構成法をみるとこの定理の ρ_2 は（或る意味で）ρ_1 に依存すると思ってよい。

さて Thom 写像の定義を [1] に沿って述べよう。我々の当面の必要度は超えるが少々一般的な形でこれを行う。次の情報が与えられているとする：

X，Y は有限 CW 複体；

η，ξ はそれぞれ X，Y 上のベクトル束；

$\tilde{f}: \eta \to \xi$ は開集合の上への同相写像；

$$f = p_\xi \circ \tilde{f} \circ s_\eta : X \to Y$$

ただし，$s_\eta : X \to \eta$ は零切断，$p_\xi : \xi \to Y$ は射影。

Y 上の任意のベクトル束 α に対し，次の写像の合成を φ とする。

$$\varphi : \eta \oplus f^*\alpha \approx (f \circ p_\eta)^*\alpha \xrightarrow[\cong]{\Phi} (p_\xi \circ \tilde{f})^*\alpha \xrightarrow{g_\alpha} \xi \oplus \alpha$$

ここで，初めの同相写像は極く自然なもの，g_α は $g_\alpha(u, a) = \tilde{f}(u) \oplus a$ で定義される開集合の上への同相写像，Φ は任意の束同型。$s_\eta \circ p_\eta \simeq 1$ だから $f \circ p_\eta = p_\xi \circ \tilde{f} \circ s_\eta \circ p_\eta \simeq p_\xi \circ \tilde{f}$ であるので Φ は存在する。X がコンパクトだから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi(D_\varepsilon(\eta \oplus f^*\alpha)) \subset \mathring{D}_\delta(\xi \oplus \alpha)$ となる $\delta > 0$ は存在する。このとき合成写像

$$\begin{aligned} T_\alpha(\tilde{f}; \Phi, \varepsilon, \delta) : Y^{\xi \oplus \alpha} &\approx D_\delta(\xi \oplus \alpha)/S_\delta(\xi \oplus \alpha) \\ &\to D_\delta(\xi \oplus \alpha)/(D_\delta(\xi \oplus \alpha) - \varphi(\mathring{D}_\varepsilon(\eta \oplus f^*\alpha))) \approx D_\varepsilon(\eta \oplus f^*\alpha)/S_\varepsilon(\eta \oplus f^*\alpha) \\ &\approx X^{\eta \oplus f^*\alpha} \end{aligned}$$

を Thom 写像と呼ぶ。

次に Thom 写像の一意性に関し若干考える。容易にわかることであるが $T_\alpha(\tilde{f}; \Phi, \varepsilon, \delta)$ はホモトピーを無視すれば ε と δ には依存しない。そこでこれを $T_\alpha(\tilde{f}; \Phi)$ と書くことにする。まず $(f \circ p_\eta)^*\alpha|_{s_\eta(X)} = (p_\xi \circ \tilde{f})^*\alpha|_{s_\eta(X)}$ に注意する。Φ が距離を保ち，かつ，$s_\eta(X)$ 上のファイバーでは恒等変換であるとき，これを nice と呼ぶ。

<u>補題 5.</u>　nice な Φ は常に存在し，Φ' を第二の nice な同型とすると　$T_\alpha(\tilde{f};\Phi)\simeq T_\alpha(\tilde{f};\Phi')$。

そこで nice な Φ に対する $T_\alpha(\tilde{f};\Phi)$ を $T_\alpha(\tilde{f})$ と略記する。これで一意的に Thom 写像が定まった。

virtual 束 $\alpha-\beta\in KO(Y)$ に対し，$\beta\oplus\beta'\cong m$ としたとき

$$T_{\alpha-\beta}(\tilde{f}) := \Sigma^{-m}T_{\alpha\oplus\beta'}(\tilde{f}) : Y^{\xi+\alpha-\beta}=\Sigma^{-m}Y^{\xi\oplus\alpha\oplus\beta'}$$
$$\longrightarrow \Sigma^{-m}X^{\eta\oplus f^*(\alpha\oplus\beta')}=X^{\eta+f^*(\alpha-\beta)}$$

と定める。

§ 3.　Generalized projective space

位相群 G の表現空間 V が G-不変な内積を有し，その単位球面 $S(V)$ への G 作用が free であるとき，(G, V) を fixed point free representation と呼ぶ。このときもしも G がコンパクトなら G は S^3, S^1, $N(S^1)$（S^1 の S^3 における正規化群），又は，有限群であることはよく知られている。以下において G はこれらのいずれかであるとし，fixed point free representation (G, V) を一つ固定する。

T_eG を G の単位元 e での接空間とし，adjoint 表現でこれを G 空間とみる。V の n 個の直和を V^n とし，G を対角的に作用

させ，その内積は自然に定める。以下の記号を使うことにする。

$$d = \dim_{\mathbb{R}} V,$$

$$P_n = P_n(V) = S(V^n) \bmod G, \quad P_0 = \emptyset,$$

$$\eta_n = [\, V \times S(V^n) \bmod G \longrightarrow P_n \,],$$

$$\zeta_n = [\, S(V^n) \times T_e G \bmod G \longrightarrow P_n \,],$$

$$Q_n = Q_n(V) = P_n^{\zeta_n}, \quad Q_0 = \{*\},$$

$$i_k : V^n = V^n \times \{0\} \subset V^n \times V^k = V^{n+k},$$

$$\left.\begin{array}{l} i_k : P_n \hookrightarrow P_{n+k} \\ i_k : Q_n \hookrightarrow Q_{n+k} \end{array}\right\} \text{上の } i_k \text{ より導びかれる写像},$$

$$P_{n+k,k} = P_{n+k} / i_k(P_n),$$

$$Q_{n+k,k} = Q_{n+k} / i_k(Q_n),$$

$$\left.\begin{array}{l} j_\ell : P_{n+k+\ell,k+\ell} \to P_{n+k+\ell,k} \\ j_\ell : Q_{n+k+\ell,k+\ell} \to Q_{n+k+\ell,k} \end{array}\right\} \text{自然な商写像},$$

$$\left.\begin{array}{l} p_{n+k} : S(V^{n+k}) \to P_{n+k} \\ p_{n+k,k} : S(V^{n+k}) \xrightarrow{p} P_{n+k} \to P_{n+k,k} \end{array}\right\} \text{自然な射影。}$$

次の三補題は古典的である。

<u>補題 6 ([7])</u>. $TP_n \oplus \zeta_n \oplus 1 \cong n\eta_n$.

<u>補題 7</u>. $\nu(i_\ell : P_k \hookrightarrow P_{k+\ell}) \cong \ell \eta_k$.

補題 8. 包含写像 i_0 と可換な同相写像 $P_{n+k,k} \approx P_k^{n\eta_k}$, $Q_{n+k,k} \approx Q_k^{\zeta_k + n\eta_k}$ が存在する。

$k \geqq 1$, $n < 0$ に対し

$$P_{n+k,k} = P_k^{n\eta_k} , \quad Q_{n+k,k} = P_k^{\zeta_k + n\eta_k}$$

と定義する。更に, $l \geqq 0$ に対し

$$i_l : P_{n+k,k} \longrightarrow P_{n+k+l,k+l}$$
$$i_l : Q_{n+k,k} \longrightarrow Q_{n+k+l,k+l}$$
$$j_l : P_{n+k+l,k+l} \longrightarrow P_{n+k+l,k}$$
$$j_l : Q_{n+k+l,k+l} \longrightarrow Q_{n+k+l,k}$$

等も定義出来る (cf. [5])。

次の定理が序に述べたものである。

定理 9. $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, $k+l+m+n \equiv 0 \mod \# J(\eta_{k+l})$ であれば, $r = d(k+l+m+n)-1$ としたとき, r-双対写像

$$\mu_1 : S^r \longrightarrow P_{k+l+n,l} \wedge Q_{l+m,l}$$
$$\mu_2 : S^r \longrightarrow P_{k+l+n,k+l} \wedge Q_{k+l+m,k+l}$$
$$\mu_3 : S^r \longrightarrow P_{k+n,k} \wedge Q_{k+l+m,k}$$

が存在し, これらによって, 二つの cofibration 列

$$P_{k+n,k} \xrightarrow{i_l} P_{k+l+n,k+l} \xrightarrow{j_k} P_{k+l+n,l} ,$$
$$Q_{k+l+m,k} \xleftarrow{j_l} Q_{k+l+m,k+l} \xleftarrow{i_k} Q_{l+m,l}$$

は互いにr-双対である。

<u>略証</u>。α, β を P_{k+l} 上の virtual 束で $J(TP_{k+l}+\alpha+\beta)=0$ とし，$r=d(k+l)+\dim\alpha+\dim\beta-\dim G-1$ とおく。定理3によれば r-双対写像

$$\rho_1 : S^r \longrightarrow P_{k+l}^{\alpha} \wedge P_{k+l}^{\beta},$$
$$\rho_2 : S^r \longrightarrow P_k^{\nu(i_l)+i_l^*\alpha} \wedge P_k^{i_l^*\beta}$$

が存在し，これらに関して

$$T_\alpha(\tilde{i}_l) : P_{k+l}^{\alpha} \longrightarrow P_k^{\nu(i_l)+i_l^*\alpha}$$

のr-双対は

$$i_{l*} : P_k^{i_l^*\beta} \longrightarrow P_{k+l}^{\beta}$$

である。ここで $\tilde{i}_l : \nu(i_l)=l\eta_k=V^l \times S(V^k) \bmod G \longrightarrow P_{k+l}$ は $\tilde{i}_l[u,v]=[v/\sqrt{1+|u|^2}, u/\sqrt{1+|u|^2}]$ で定められるチューブ状近傍。

まず $(\alpha,\beta)=(\zeta_{k+l}+m\eta_{k+l}, n\eta_{k+l})$ とすると，r-双対写像

$$\rho_1' : S^r \longrightarrow Q_{k+l+m,k+l} \wedge P_{k+l+n,k+l}$$
$$\rho_2' : S^r \longrightarrow Q_{k+l+m,k} \wedge P_{k+n,k}$$

を得る。しかもこれらに関し

$$T_{\zeta_{k+l}+m\eta_{k+l}}(\tilde{i}_l) : Q_{k+l+m,k+l} \longrightarrow Q_{k+l+m,k}$$

が

$$i_l : P_{k+n,k} \longrightarrow P_{k+l+n,k+l}$$

の双対となっている。次に k と l を入れ代えてから $(\alpha,\beta)=(n\eta_{k+l}, \zeta_{k+l}+m\eta_{k+l})$ とすると r-双対写像

$$\rho_1'' : S^r \longrightarrow P_{k+l+n,\,k+l} \wedge Q_{k+l+m,\,k+l}$$

$$\rho_2'' : S^r \longrightarrow P_{k+l+n,\,l} \wedge Q_{l+m,\,l}$$

を得，しかもこれらに関し

$$T_{n\eta_{k+l}}(\tilde{i}_k) : P_{k+l+n,\,k+l} \longrightarrow P_{k+l+n,\,l}$$

の双対は

$$i_k : Q_{l+m,\,l} \longrightarrow Q_{k+l+m,\,k+l}$$

である。双対写像の構成法を詳しく検討すると $\tau\circ\rho_1' = \rho_1''$ となるように ρ_1', ρ_1'' を作れることがわかる。ここで $\tau : Q\wedge P \to P\wedge Q$ は入れ代え写像。そこで

$$\mu_1 = \rho_2'' ,\ \mu_2 = \rho_1'' = \tau\circ\rho_1' ,\ \mu_3 = \tau\circ\rho_2'$$

とおくと，次の補題10によって定理9の証明が終わる。

<u>補題10.</u> $T_{\zeta_{k+l}+m\eta_{k+l}}(\tilde{i}_l) \simeq j_l$, $T_{n\eta_{k+l}}(\tilde{i}_k) \simeq j_k$ 。

§ 4. Transfer

$q : S(V^k) \longrightarrow \{*\}$ は一意的な写像；$\hat{p}_k : S(V^k) \longrightarrow V^k \times P_k$ は $\hat{p}_k(u) = (u, p_k(u))$ で定義される embedding ；$\tilde{p}_k : \nu(\hat{p}_k) \to V^k \times P_k$ は $\hat{p}_k$ のチューブ状近傍とする。このとき安定写像

$$\tau^m = \tau_V^m = q_*\circ T_{\zeta_k+m\eta_k}(\tilde{p}_k) : Q_{k+m,\,k} \longrightarrow \{*\}^{dm} = S^{dm}$$

$$\hat{\tau}^m = \hat{\tau}_V^m = q_*\circ T_{m\eta_k}(\tilde{p}_k) : P_{k+m,\,k} \longrightarrow \{*\}^{dm-\dim G} = S^{dm-\dim G}$$

を transfer と呼ぶ。G が S^3 と $N(S^1)$ でないなら $\tau^m = \hat{\tau}^m$ である。テレスコープを用いて

$$Q_{\infty+m,\infty} = \mathrm{Tel}(Q_{1+m,1} \to Q_{2+m,2} \to \cdots)$$
$$P_{\infty+m,\infty} = \mathrm{Tel}(P_{1+m,1} \to P_{2+m,2} \to \cdots)$$

とおいて，$\tau^m, \hat{\tau}^m$ を自然に拡張する：

$$\tau^m : Q_{\infty+m,\infty} \longrightarrow S^{dm}$$
$$\hat{\tau}^m : P_{\infty+m,\infty} \longrightarrow S^{dm-\dim G}.$$

さらに

$$t_V^m = \tau_*^m : \pi_*^s(Q_{\infty+m,\infty}) \longrightarrow \pi_*^s(S^{dm})$$
$$\hat{t}_V^m = \hat{\tau}_*^m : \pi_*^s(P_{\infty+m,\infty}) \longrightarrow \pi_*^s(S^{dm-\dim G})$$

とおく。特に $V = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ で $G = S(V)$ が積で作用する標準的な場合の $\hat{t}_V^0$ は framed bordism で定義される transfer

$$\Omega_*^{fr}(BG) \longrightarrow \Omega_{*+d-1}^{fr}, \quad [M, \Phi, \lambda] \mapsto [S(\lambda), \Phi_\lambda]$$

と一致する（cf. [3]）。

次に $\tau^m, \hat{\tau}^m$ は，自己ホモトピー同値写像を無視すれば，標準的な写像であることを，その双対が標準的であることを示すことによって確かめる。$V = \mathbb{R}^d$ とみる。$E_{k+1} \subset S(V^{k+1})$ はベクトル $x = (x_1, \cdots, x_{k+1})$ で $x_{k+1} = (\sqrt{1-\sum_1^k |x_i|^2}, 0, \cdots, 0) \in V = \mathbb{R}^d$ となるものの集合とする。

$$a : D(V^k) \longrightarrow E_{k+1}, \quad a(y) = (y, \sqrt{1-|y|^2}, 0, \cdots, 0)$$

は同相写像である。Q_{k+1} を定義する写像の制限によって中へ

の相対同相写像

$$f' : (E_{k+1} \times D(T_eG), \partial(E_{k+1} \times D(T_eG))) \longrightarrow (Q_{k+1}, Q_k)$$

を得る。同相写像

$$b : D(V^k \times T_eG) \longrightarrow D(V^k) \times D(T_eG)$$

が

$$b(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{|x|^2+|y|^2}}{\max(|x|,|y|)}x, \dfrac{\sqrt{|x|^2+|y|^2}}{\max(|x|,|y|)}y \right) & , (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定義され，従って中への相対同相写像

$$f = f' \circ (a \times 1) \circ b : (D(V^k \times T_eG), S(V^k \times T_eG)) \longrightarrow (Q_{k+1}, Q_k)$$

を得る。特に $V = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ で $G = S(V)$ が積で作用する場合，f は上への相対同相写像であるから Q_k の胞体構造を与える。

$$\tau_k = f|_{S(V^k \times T_eG)} : S(V^k \times T_eG) \longrightarrow Q_k$$

とおき

$$\tau_{k+l,k} : S(V^{k+l} \times T_eG) \longrightarrow Q_{k+l} \longrightarrow Q_{k+l,k}$$

も自然に定める。

<u>定理11</u>　$k \geq 1$, $l \geq 1$, $k+l+m \equiv 0 \mod \# J(\eta_k)$ とする。$r = d(k+l+m)-1$ とおくと r 双対写像

$$\rho_1 : S^r \longrightarrow P_{k+l,k} \wedge Q_{k+m,k}$$

$$\rho_2 : S^r \longrightarrow S(V^{k+l}) \wedge \{*\}^{dm}$$

$$\mu_1 : S^r \longrightarrow P_{k+m,k} \wedge Q_{k+l,k}$$

$$\mu_2 : S^r \longrightarrow \{*\}^{dm-\dim G} \wedge S(V^{k+l} \times T_e G)$$

と安定自己ホモトピー同値写像

$$\omega : S(V^k)^{dm} \longrightarrow S(V^k)^{dm}$$

$$\omega' : S(V^k)^{dm-\dim G} \longrightarrow S(V^k)^{dm-\dim G}$$

が存在して，ρ_1 と ρ_2 に関し

$$q_* \circ \omega \circ T_{\zeta_k+m\eta_k}(\hat{p}_k) : Q_{k+m,k} \longrightarrow \{*\}^{dm} = S^{dm}$$

$$p_{k+l,k} : S(V^{k+l}) \longrightarrow P_{k+l,k}$$

は互いに双対であり，μ_1 と μ_2 に関し

$$q_* \circ \omega' \circ T_{m\eta_k}(\tilde{p}_k) : P_{k+m,k} \longrightarrow \{*\}^{dm-\dim G}$$

$$q_{k+l,k} : S(V^{k+l} \times T_e G) \longrightarrow Q_{k+l,k}$$

は互いに双対である。

簡単のため，定理11に現われた $q_* \circ \omega \circ T_{\zeta_k+m\eta_k}(\hat{p}_k)$, $q_* \circ \omega' \circ T_{m\eta_k}(\tilde{p}_k)$ も transfer と呼んで，それぞれ τ^m, $\hat{\tau}^m$ と記すことにする。

以下，$V = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ で $G = S(V)$ は積で作用する標準的な場合のみ考える。

定理9と定理11より次を得る。

系12. transfer は標準的な cofibration にうめこまれる：

$$S^{dm-1} = Q_{m,1} \xrightarrow{i_k} Q_{k+m,k+1} \xrightarrow{j_1} Q_{k+m,k} \xrightarrow{\tau^m} S^{dm}.$$

$$S^{d(m-1)} = P_{m,1} \xrightarrow{i_k} P_{k+m,k+1} \xrightarrow{j_1} P_{k+m,k} \xrightarrow{\hat{\tau}^m} S^{d(m-1)+1}.$$

次に t^m と projective stable stem との関係を述べる (cf. [4])。

<u>定理13</u> 与えられた整数 m, i に対し整数 $k\geq 1$, $l\geq 1$ を $i\leq d(1+k+m)-3$, $l\equiv 0 \bmod \#J(\eta_{1+k})$, $l-m>k$ となるように勝手に取ると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Image}\left[t^m : \pi_i^s(Q_{m+m,\infty}) \to \pi_i^s(S^{dm})\right] \\
&\quad = \mathrm{Im}\left[t^m : \pi_i^s(Q_{k+m,k}) \to \pi_i^s(S^{dm})\right] \\
&\quad \cong \mathrm{Im}\left[p_{l-m,k}^* : \pi_s^{dl-1-i}(P_{l-m,k}) \to \pi_s^{dl-1-i}(S(V^{l-m}))\right] \\
&\quad = \mathrm{Im}\left[p_{l-m}^* : \pi_s^{dl-1-i}(P_{l-m}) \to \pi_s^{dl-1-i}(S(V^{l-m}))\right] \\
&\quad =: \pi_{d(l-m)}^{SV}(S^{dl-1-i})
\end{aligned}
$$

次のホモトピー可換な、よく知られた、図式を考える。

$$
\begin{tikzcd}
Q_k(\mathbb{H}) \arrow[r, "\tilde{t}"] \arrow[d, hook, "j_{\mathbb{H}}"'] & Q_{2k}(\mathbb{C}) \arrow[d, hook, "j_{\mathbb{C}}"] \\
Sp(k) \arrow[r, hook, "c"] \arrow[dr, "i_{\mathbb{H}}"'] & U(2k) \arrow[d, "i_{\mathbb{C}}"] \\
& \Omega^{4k}S^{4k}
\end{tikzcd}
$$

この adjoint を取って次の安定ホモトピー可換図式

$$
\begin{tikzcd}
Q_k(\mathbb{H}) \arrow[rr, "\tilde{t}"] \arrow[dr, "ad(i_{\mathbb{H}}j_{\mathbb{H}})"'] & & Q_{2k}(\mathbb{C}) \arrow[dl, "ad(i_{\mathbb{C}}j_{\mathbb{C}})"] \\
& S^0 &
\end{tikzcd}
$$

を得るが，Knapp [2] によれば $ad(i_{\mathbb{C}}j_{\mathbb{C}}) \simeq -\tau^{\circ}_{\mathbb{C}}$。これより

定理14. $ad(i_{\mathbb{H}}j_{\mathbb{H}}) \simeq \tau^{\circ}_{\mathbb{H}}$ 又は $-\tau^{\circ}_{\mathbb{H}}$。

低次元での $\hat{t}^{\circ}_{\mathbb{H}}$, $t^{\circ}_{\mathbb{H}}$, $t^{\circ}_{\mathbb{C}}$ の計算結果を表にまとめて末尾に付す。

References

[1] J.M. Boardman: Stable homotopy theory, Chapter V-duality and Thom spectra, mimeographed note, Univ. of Warwick, 1966.

[2] K. Knapp: Some applications of K-theory to framed bordism: e-invariant and transfer, Habilitationsschrift, Bonn, 1979.

[3] P. Löffler and L. Smith: Line bundles over framed manifolds, Math. Zeit. 138 (1974), 35-52.

[4] H. Ōshima: On F-projective stable stems, Osaka J. Math. 16 (1979), 505-528.

[5] H. Ōshima: S-duality theory of generalized projective spaces, preprint.

[6] E.H. Spanier and J.H.C. Whitehead: Duality in homotopy theory, Mathematika 2 (1955), 56-80.

[7] R.H. Szczarba: On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces, Amer. J. Math. 86 (1964), 685-697.

A table of the images of the 0-th transfers in low dimensions

r	π_r^S	$\mathrm{Im}(J)$	$\mathrm{Im}(\hat{t}_H)$	$\mathrm{Im}(t_H^0)$	$\mathrm{Im}(\hat{t}_C) = \mathrm{Im}(t_C^0)$
0	Z		0	0	0
1	$Z_2\{\eta\}$	all	0	0	all
2	$Z_2\{\eta^2\}$	0	0	0	all
3	$Z_8\{\nu\}+Z_3\{\alpha_1\}$	all	all	all	all
6	$Z_2\{\nu^2\}$	0	all	all	all
7	$Z_{16}\{\sigma\}+Z_3+Z_5$	all	all	$Z_4\{4\sigma\}+Z_3+Z_5$	$Z_8\{2\sigma\}+Z_3+Z_5$
8	$(Z_2)^2\{\bar{\nu},\varepsilon\}$	$Z_2\{\bar{\nu}+\varepsilon\}$	$Z_2\{\bar{\nu}+\varepsilon\}$	$Z_2\{\bar{\nu}\}$	all
9	$(Z_2)^3\{\mu,\nu^3,\eta\varepsilon\}$	$Z_2\{\nu^3+\eta\varepsilon\}$	$(Z_2)^2\{\nu^3,\eta\varepsilon\}$	$Z_2\{\nu^3\}$	$(Z_2)^2\{\nu^3,\eta\varepsilon\}$
10	$Z_2\{\eta\mu\}+Z_3\{\beta_1\}$	0	0	$Z_3\{\beta_1\}$	all
11	$Z_8\{\zeta\}+Z_9+Z_7$	all	all	all	all
13	$Z_3\{\alpha_1\beta_1\}$	0	all	all	all
14	$(Z_2)^2\{\sigma^2,\kappa\}$	0	$Z_2\{\sigma^2\}$	?	?
15	$Z_2\{\eta\kappa\}+Z_{32}\{\rho\}+Z_{15}$	$Z_{32}+Z_{15}$	?	$Z_2\{\eta\kappa\}+Z_8\{4\rho\}+Z_{15}$	$Z_2\{\eta\kappa\}+Z_{16}\{2\rho\}+Z_{15}$